ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

2018.08.06 / 0830 - 1140

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3 - |x|$ හා $y = |x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x| + |x-1| \leq 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

[තුන්වැනි පිටුව බලන්න.

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\dfrac{\pi}{3}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.

4. $\left(x^2+\dfrac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^4 හි සංගුණක සමාන වේ. k නියතයෙහි අගය සොයන්න.

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \dfrac{\pi^2}{32}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක $\dfrac{3}{2}(e^2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[පස්වැනි පිටුව බලන්න.

7. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ සඳහා $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y = \sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

....

8. l_1 යනු $x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P \equiv (3, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l_1 ට ලම්බ වූ l_2 සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

Q යනු l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද R යනු $PQ : QR = 1 : 2$ වන පරිදි l_2 මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

....

[ගයවැනි පිටුව බලන්න.

9. $P \equiv (1, 2)$ හා $Q \equiv (7, 10)$ යැයි ගනිමු. P හා Q ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි a හා b නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. P හා Q ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R \equiv (1, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[ඉදිරි පිටුව බලන්න.

**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2018 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உ யர் தர)ப் பரீட்சை, 2018 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2018

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන්, $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා,

$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර, a ඇසුරෙන් b සොයන්න.

(b) $c(\neq 0)$ හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x + c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x - c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න.

c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

12. (a) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $t_n = \displaystyle\sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

[අවවැනි පිටුව බලන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයා, a හි කිසිදු අගයකට $\mathbf{P}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිත ව, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ලියා දක්වා $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ වන පරිදි $\mathbf{R}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි, මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු. $\mathrm{Re}\,w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\mathrm{Im}\,w = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi)$ නම්, $w = i\cot\dfrac{\alpha}{2}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

(*c*) ආගන්ඩ් සටහනක, A හා B ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. C හා D ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය; මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ වේ. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

14. (*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

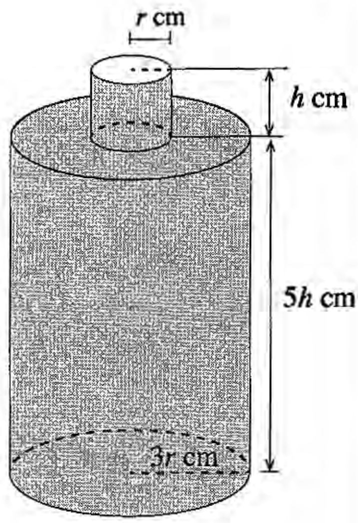
$x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in \mathbb{R}$ හි අගයන් සොයන්න.

[නවවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) අරය $3r$ cm හා උස $5h$ cm වන සංවෘත කුහර ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය r cm වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය r cm හා උස h cm වන විවෘත කුහර ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර 391π cm^3 ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = \pi r(32h + 17r)$ **බව දී ඇත.** S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



15. (*a*) (i) x^2, x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int x^2 \cos 2x\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

16. $A \equiv (-2, -3)$ හා $B \equiv (4, 5)$ යැයි ගනිමු. AB රේඛාව සමග l_1 හා l_2 රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 හා l_2 රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් l_1 හා l_2 මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

PQ හි සමීකරණය සොයා, P හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද A, P, B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු. $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය, S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

R ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$ විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

[දහවැනි පිටුව බලන්න.

17. (*a*) $0 \leq \theta \leq \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

***

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් , සියලු $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට , ව: පැ: $=1^3=1$ හා ද: පැ: $=\frac{1}{4}\cdot 1^2 (1+1)^2=1$ 05

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in Z^+$ ගෙන $n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම් , $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$ 05

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 05

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2+4p+4]}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2 (\overline{p+1}+1)^2$$ 05

එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම් , $n=p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in Z^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 05

25

---

02. එකම රූප සටහනක $y=3-|x|$ හා $y=|x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|x|+|x-1| \le 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

ඡේදන ලක්ෂ්‍යවලදී $-x+1=3+x$ හෝ

$x-1=3-x$ 05

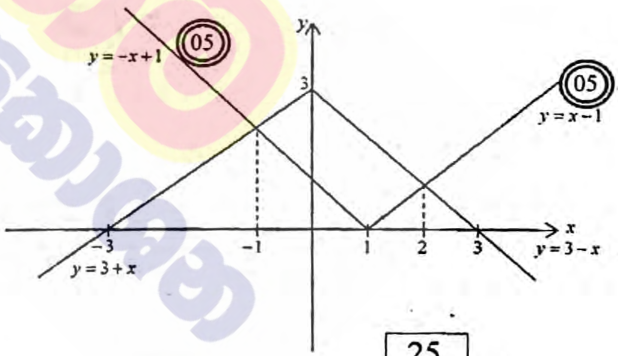
එනම් $x-1$ හෝ $x=2$

තව ද $|x|+|x-1| \le 3$ 05

$\Leftrightarrow$ $|x-1| \le 3-|x|$

එනයින් , ප්‍රස්තාරයෙන් , 05

විසඳුම් $-1 \le x \le 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.



25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x|+|x-1| \le 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$: $|x|+|x-1| \le 3$ $\Leftrightarrow$ $-x-(x-1) \le 3$ 05

$\Leftrightarrow$ $-2x+1 \le 3$

$\Leftrightarrow$ $x \ge -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \le x \le 0$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0<x\le 1$

$|x|+|x-1|\le 3$

$\Leftrightarrow\ x-(x-1)\le 3$

$\Leftrightarrow\ x-(x-1)\le 3$

$\Leftrightarrow\ 1\le 3$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0<x\le 1$ වේ. 05

(iii) අවස්ථාව $1<x$

$|x|+|x-1|\le 3$

$\Leftrightarrow\ x+x-1\le 3$

$\Leftrightarrow\ 2x\le 4$

$\Leftrightarrow\ x\le 2$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1<x\le 2$ වේ.

එනයින් විසඳුම් $-1\le x\le 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

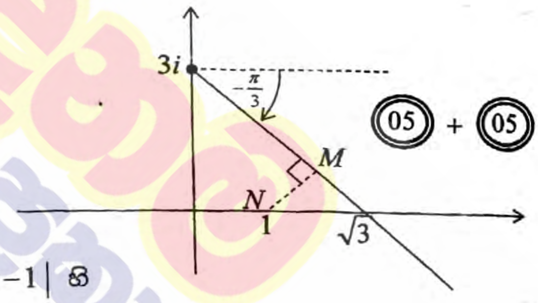
03. ආගන්ඩ් සටහනක $Arg\,(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $Arg\,(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.

$Arg\,(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\ Arg\,\overline{(\bar{z}+3i)}=\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\ Arg\,(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ 05



05 + 05

එනයින් $Arg\,(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි

අවම අගය NM දෙනු ලබයි. 05

මෙහි $NM=(\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{(3-\sqrt{3})}{2}$ 05

25

04. $\left(x^2+\frac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^4 හි සංගුණක සමාන වේ. k නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2+\frac{3k}{x}\right)^8=\sum_{r=0}^{8}{}^8C_r\,(x^2)^r\left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r}$$ 05

$$=\sum_{r=0}^{8}{}^8C_r\,(3k)^{8-r}\,x^{3r-8}$$

$x^1: 3r-8=1\ \Leftrightarrow\ r=3$ 05

$x^4 : 3r - 8 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad r = 4$

දත්තයෙන් ${}^8C_3\,(3k)^5 = {}^8C_4\,(3k)^4$ (05)

$\frac{8!}{3!5!}(3)^5 k = \frac{8!}{4!4!}3^4$ (05)

$k = \frac{5}{12}$ (05)

25

05.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 (x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$	බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 (x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2 (x+1)} \quad (05)$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1} \quad (05)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{1} \quad (05)\ (05)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad (05)$$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 (x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 (x+1)} \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2 (x+1)\left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad (05)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad (05)$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \quad (05)\ (05)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad (05)$$

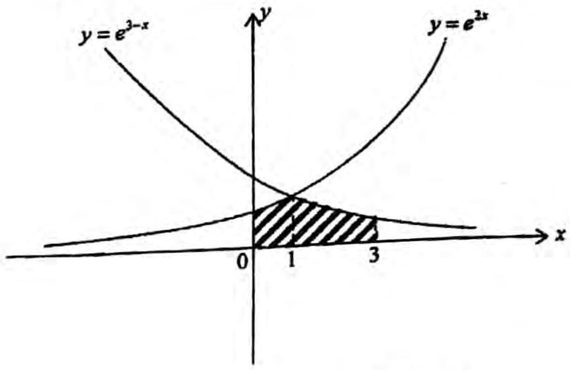
06. $y=e^{2x}$, $y=e^{3-x}$, $x=0$, $x=3$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය , වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}\left(e^2-1\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$\int_0^1 e^{2x}dx+\int_1^3 e^{3-x}dx=\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1+\left.\frac{e^{3-x}}{(-1)}\right|_1^3 \quad 05 \quad 05 \quad 05$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+(-1)+e^2 \quad 05$$

$$=\frac{3e^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\left(e^2-1\right) \quad 05$$



25

07. $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ සඳහා $x=\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y=\sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}=\cos t\sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t=\frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$x=\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad y=\sin t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\times\sec^2\frac{t}{2}\times\frac{1}{2} \quad 05 \qquad \frac{dy}{dt}=\cos t \quad 05$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \quad 05$$

$$=\frac{1}{\sin t}$$

දැන් $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\cos t\sin t$ 05

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad 05$$

25

08. l_1 යනු $x+y-5=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P\equiv(3\ ,\ 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l_1 ට ලම්බ වූ l_2 සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

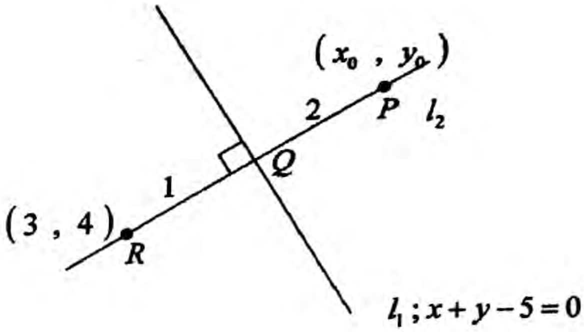
Q යනු l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද R යනු $PQ:QR=1:2$ වන පරිදි l_2 මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

l_2 හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{-1} = 1$ (05)

l_2 සමීකරණය : $y-4=1(x-3)$

$x-y+1=0$ (05)

$Q \equiv (2\ ,\ 3)$ (05)



$R \equiv (x_0\ ,\ y_0)$ යයි ගනිමු.

එවිට

$2 = \frac{x_0+6}{3}$ සහ $3 = \frac{y_0+8}{3}$ (05)

$\therefore\ x_0 = 0$ සහ $y_0 = 1$

$\therefore\ R \equiv (0\ ,\ 1)$ (05)

> වෙනත් ක්‍රමයක්
>
> $\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$ බැවින් (05)
>
> $R \equiv \left(\frac{-2\times3+2\times3}{3-2}\ ,\ \frac{-2\times4+3\times3}{3-2} \right)$
>
> $=(0\ ,\ 1)$ (05)

25

---

09. $P \equiv (1\ ,\ 2)$ හා $Q \equiv (7\ ,\ 10)$ යැයි ගනිමු. P හා Q ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි a හා b නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S+\lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in R$ වේ. P හා Q ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා , මෙම වෘත්තය $R \equiv (1\ ,\ 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$a=7$
$b=10$ (05)

$P \equiv (1\ ,\ 2)$ සහ $Q \equiv (7\ ,\ 10)$ යන දෙකම $s=0$ සහ $4x-3y+2=0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින් $s'=0$ වේ. (05) (05)

$\therefore\ P$ සහ Q ලක්ෂ්‍ය $s'=0$ මත පිහිටයි.

$s'=0$ යන්න $R \equiv (1\ ,\ 4)$ හරහා යයි නම් ,

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ වේ. (05)

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2$ (05)

25

---

10. $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in z$ වේ.

$\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$

$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ (05)

$= \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)}$ (05)

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}$$ 05 $\because$ $n\in z$ සඳහා $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$=\frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2}$$ 05

$$=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$$ 05

11. (a) a , $b\in R$ යැයි ගනිමු. $3x^2-2(a+b)x+ab=0$ සමීකරණයේ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒනයින්** මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන් $\beta=\alpha+2$ යැයි ගනිමු. $a^2-ab+b^2=9$ බව පෙන්වා $|a|\leq\sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර a ඇසුරෙන් b සොයන්න.

(b) $c(\neq0)$ හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x)=x^3+4x^2+cx+d$ යැයි ද ගනිමු. $(x+c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x-c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c=-2$ හා $d=-12$ බව පෙන්වන්න. c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා (x^2-4) මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $3x^2-2(a+b)x+ab=0$

විවේචකය $\Delta=4(a+b)^2-12(ab)$

$$=4(a^2+2ab+b^2-3ab)$$ 10

$$=4(a^2-ab+b^2)$$

$$=4\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]\geq0 \text{ for all } a,\ b\in R$$ 05 05

ඒ නයින් , මූල තාත්ත්වික වේ. 05

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+b)$$ 05 $$\alpha\beta=\frac{ab}{3}$$ 05

$$\beta=\alpha+2\Rightarrow(\beta-\alpha)^2=4$$ 05

$$\Rightarrow(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4$$ 05

$$\Rightarrow\frac{4}{9}(a+b)^2-\frac{4}{3}ab=4$$ 05 05

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2-3ab=9$$

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2=9$$ 05

$$b^2-ab+a^2=9$$

$$\Rightarrow\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-a^2+9$$

$$=-\frac{3a^2}{4}+9$$

$$=\frac{3}{4}\left(12-a^2\right) \quad 10$$

$$\Rightarrow 12-a^2\geq 0 \quad 05 \quad \Rightarrow |a|\leq\sqrt{12} \quad 05$$

$$b=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12-a^2} \quad 10$$

(b) $f(x)=x^3+4x^2+cx+d$

$f(-c)=-c^3+4c^2-c^2+d=-c^3$ 05

$\Rightarrow 3c^2+d=0 \quad ------(1)$ 05

$f(c)=c^3+4c^2+c^2+d=0$ 05

$\Rightarrow c^3+5c^2+d=0 \quad ------(2)$ 05

$(2)-(1)$ මගින් $c^3+2c^2=0$ ලැබේ.

$\Rightarrow c^2(c+2)=0$ 05

$c\neq 0$ නිසා $c=-2$ 05

$\Rightarrow d=-3c^2=-12$ 05

දැන් $f(x)=x^3+4x^2-2x-12$

$f(x)$ යන්න x^2-4 මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x+\mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x)=\left(x^2-4\right)q(x)+\lambda x+\mu$ 05

$\Rightarrow f(x)=(x-2)(x+2)q(x)+\lambda x+\mu$

$f(2)=8=2\lambda+\mu$ හා 05

$f(-2)=0=-2\lambda+\mu$ 05

$\Rightarrow \mu=4$ හා $\lambda=2$ 05

$\therefore$ ශේෂය $=2x+4$ 05

12. (a) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැණු ළමයින් දෙදෙනෙකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන් , සාමාජිකයන් හය දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැණු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි කරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම් ,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැණු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම් ,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස   න සොයන්න.

(b) $r \in z^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2 (r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in z^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $n \in z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{13}{144} - \dfrac{1}{4(n+2)^2} - \dfrac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \subset z^+$ සඳහා $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන		කමිටු ගණන	
1 කණ්ඩායම	2 කණ්ඩායම		
2	4		
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$	10
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$	10
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$	10
		27	05

$\therefore$ වෙනස් කමිටු ගණන $= 27 \times 2$
$= 54$ 10

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24$ 05

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

1 කණ්ඩායම		2 කණ්ඩායම		කමිටු ගණන	
M (3)	F (2)	M (3)	F (2)		
2		2	2	${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$	10
2		3	1	${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$	10
1	1	3	1	${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$	10
2	2	2		9	
3	1	2		6	05
3	1	1	1	12	

කමිටු ගණන : 9+6+12+9+6+12 = 54 10

(b) $f(r) - f(r+2) = \dfrac{1}{(r+1)^2} - \dfrac{1}{(r+3)^2}$ 05

$= \dfrac{4(r+2)}{(r+1)^2 (r+3)^2}$ 05

$= 4U_r$ 05

එවිට

$$r=1;\quad 4U_1=f(1)-f(3)$$
$$r=2;\quad 4U_2=f(2)-f(4) \quad 10$$
$$r=3;\quad 4U_3=f(3)-f(5)$$
$$\vdots$$
$$r=n-2;\quad 4U_{n-2}=f(n-2)-f(n)$$
$$r=n-1;\quad 4U_{n-1}=f(n-1)-f(n+1) \quad 10$$
$$r=n;\quad 4U_n=f(n)-f(n+2)$$

$$\sum_{r=1}^{n}U_r=f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}$$
$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{13}{144}-\frac{1}{4(n+2)^2}-\frac{1}{4(n+3)^2} \quad 10$$

$n\to\infty$ විට ද.පැ. හි සීමාව $\frac{13}{144}$ 05

$\therefore\ \sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\underline{\underline{\frac{13}{144}}}$ 05

05

$$t_n=\sum_{r=n}^{2n}U_r$$
$$=\sum_{r=n}^{2n}U_r-\sum_{r=n}^{n-1}U_r \quad 05$$

$\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n}U_r-\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1}U_r \quad 05$$
$$=\frac{13}{144}-\frac{13}{144} \quad 05$$
$$=0 \quad 05$$

13. (a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ හා $B=\begin{pmatrix}3 & 2a\\ -1 & 0\\ 1 & 3a\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $a\in R$ වේ.

$P=AB$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන P න්‍යාසය සොයා a හි කිසිඳු අගයකට P^{-1} නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$P\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ නම් $a=2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව $Q=P+I$ යැයි ගනිමු.

මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයකි.

Q^{-1} ලියා දක්වා $AA^{T}-\frac{1}{2}R=\left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$ වන පරිදි R න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z=x+iy$ යැයි ගනිමු. මෙහි x , $y\in R$ වේ.

z හි මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z}=|z|^{2}$

(ii) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$ හා $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$ බව පෙන්වන්න.

$z\neq 1$ හා $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු.

$\operatorname{Re}w=\dfrac{1-|z|^{2}}{|1-z|^{2}}$ හා $\operatorname{Im}w\dfrac{2\operatorname{Im}z}{|1-z|^{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha\,(0<\alpha<2\pi)$ නම් $w=i\cot\dfrac{\alpha}{2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(c) ආගන්ඩ් සටහනක A හා B ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. C හා D ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D=\theta$ වන පරිදි ය. මෙහි $\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{7}{25}\right)$ වේ.

C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $P=AB=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2a\\-1&0\\1&3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2a\\1&a\end{pmatrix}$ 10

$\begin{vmatrix}2&2a\\1&a\end{vmatrix}=2a-2a=0$ 05

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා p^{-1} නොපවතී. 05

වෙනත් ක්‍රමයක්

p^{-1} පැවතීම සඳහා 05

$\begin{pmatrix}2&2a\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $b,c,d,e\in R$ වන පරිදි පැවතිය යුතු ය.

$\Leftrightarrow$ $2b+2ad=1$, $b+ad=0$, $2c+2ae=0$ සහ $c+ae=1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා p^{-1} නොපවතී. 05

If $P\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ නම් $\begin{pmatrix}2+4a\\1+2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$ 05

$\Leftrightarrow \quad 2+4a=10$ සහ $1+2a=5$ (05)

$\Leftrightarrow \quad a=2$

$a=2$

$$Q=P+I=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix} \quad (05)$$

$$\therefore \quad Q^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-1&3\end{pmatrix} \quad (10)$$

$$AA^T-\frac{1}{2}R=\left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$$

$$=5Q^{-1} \quad (05)$$

$$\Leftrightarrow \quad R=2AA^T-10Q^{-1}$$

$$=2\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\\0&-1\end{pmatrix}-10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}3&-4\\-1&3\end{pmatrix} \quad (05)$$

(05)

$$=2\begin{pmatrix}2&6\\6&21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-8\\-2&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&20\\14&36\end{pmatrix} \quad (05)$$

(b) $\quad z=x+iy \qquad x\ ,\ y\in R$

(05) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ සහ $\bar{z}=x-iy$ (05)

(i) $\quad z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$ (05)

(ii) $\quad z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\operatorname{Re}z$ සහ (05)

$\quad z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy=2i\operatorname{Im}z$ (05)

$z\neq 1$ නම් $w=\dfrac{1+z}{1-z}\times\dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\dfrac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}=\dfrac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im}z}{|1-z|^2}$

(05) (05) (05)

$$\operatorname{Re}w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \text{ සහ } \operatorname{Im}w=\frac{2\operatorname{Im}z}{|1-z|^2} \quad (05)$$

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad (0<\alpha<2\pi)$

එවිට $|z|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}w=0$ (05)

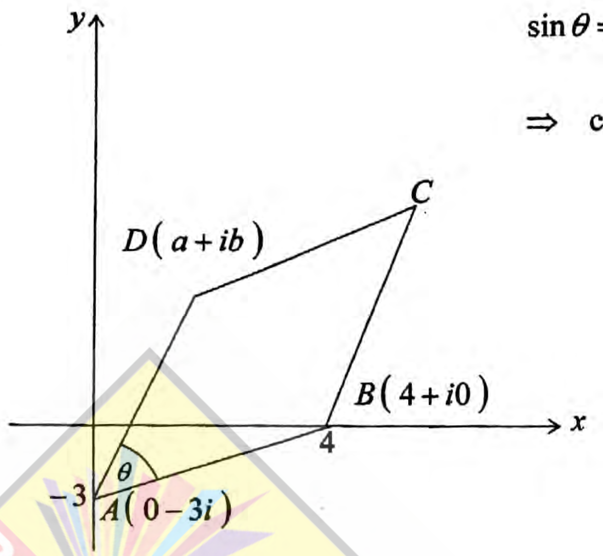
$$\therefore \quad w=\frac{2i\operatorname{Im}z}{|1-z|^2}=\frac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} \quad (05)$$

(05)

(05)

$$= \frac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = i\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\frac{\alpha}{2}$$

(c)



$$\sin\theta = \frac{7}{25} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{24}{25}$$

$D \equiv (a\ ,\ b)$ යයි ගනිමු.

A වටා AB වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් AD ගත හැක.

$\therefore \quad a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$ 10

$$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad a + i(b+3) = 3 + 4i$

$\Leftrightarrow \quad a = 3$ සහ $b = 1$

$\therefore \quad D$ මගින් $3+i$ නිරූපණය කරයි. 05

$C \equiv (p\ ,\ q)$ නම් $\dfrac{p+0}{2} = \dfrac{3+4}{2}$ හා $\dfrac{q-3}{2} = \dfrac{1+0}{2}$

$\Rightarrow p = 7$ හා $q = 4$

$\therefore \quad c$ මගින් $7+4i$ නිරූපණය කරයි. 05

14. (a) $x \neq -1\ ,\ \dfrac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

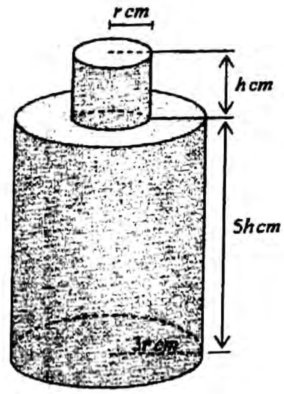
$x \neq -1\ ,\ \dfrac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න

$f'(x) = \dfrac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in R$ හි අගයන් සොයන්න.

(b) අරය $3r\,cm$ හා උස $5h\,cm$ වන සංවෘත කුහර ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය $r\,cm$ වන තැටියක් ඉවත් කර , අරය $r\,cm$ හා උස $h\,cm$ වන විවෘත කුහර ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවි කර $391\pi\,cm^3$ ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S\,cm^2$ යන්න $S=\pi r(32h+17r)$ බව දී ඇත. S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -1\ ,\ \frac{1}{3}$ සඳහා ; $f(x)=\dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$

15

එවිට

$$f'(x)=\frac{16(x-1)^2(3x-1)-16(x-1)\left[2(x+1)(3x-1)+3(x+1)^2\right]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{16(x+1)\left[(x+1)(3x-1)-2(x-1)(3x-1)-3(x-1)(x+1)\right]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2};\left(x\neq -1\ ,\ \frac{1}{3}\right)$$ 10

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ එවිට $y=0$ 05

$\lim_{x\to -1}\pm f(x)=\infty$, $x\xrightarrow{\lim}\frac{1}{3}-f(x)=\infty$ සහ $x\xrightarrow{\lim}\frac{1}{3}+f(x)=-\infty$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x=-1$ සහ $x=\frac{1}{3}$

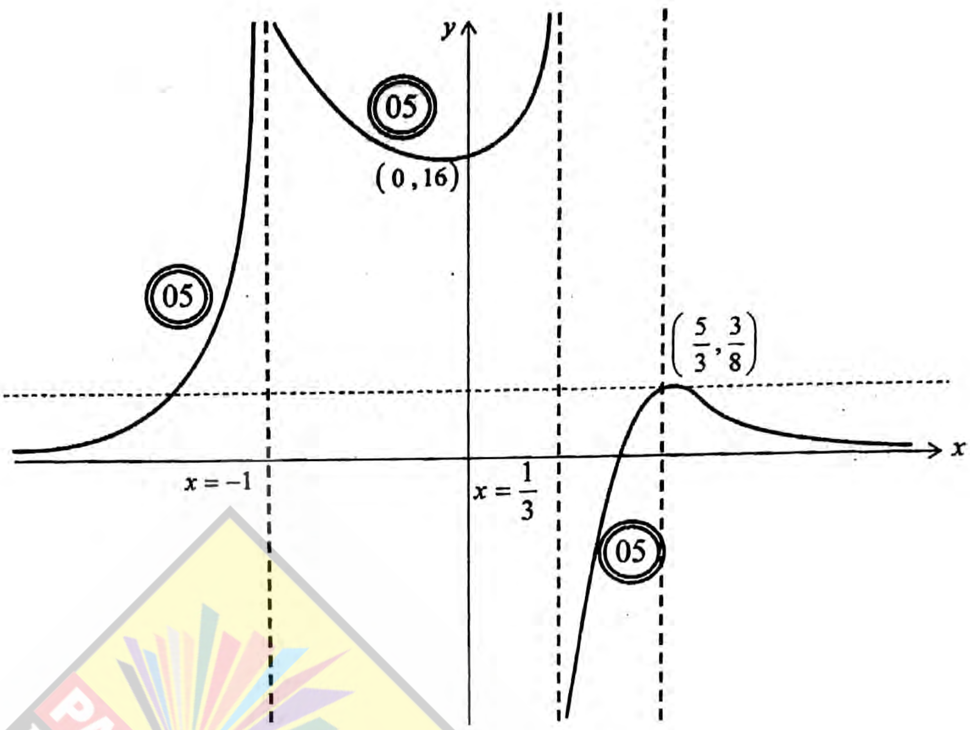
හැරුම් ලක්ෂ්‍යවලදී $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ හෝ $x=\frac{5}{3}$ 05

	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<x<\infty$
$f'(x)$ ලකුණ	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.

05 05 05 05 05

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : $(0\ ,\ 16)$ ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}\ ,\ \frac{3}{8}\right)$ 05

ස්ථානීය උපරිමයක් 05



$$k(x+1)^2(3x-1)=16(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$$

05

$k \leq 0$ හෝ $\frac{3}{8}<k<16$ එනම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පමණක් පවතී.

(b) පරිමාව : $391\pi=\pi(3r)^2(5h)+\pi r^2 h$ 10

$$\Rightarrow \quad 391=46r^2h$$

$$\Rightarrow \quad h=\frac{17}{2r^2}\ , \quad (r>0)$$ 05

පෘෂ්ඨීක වර්ගඵලය : $S=\pi r(32h+17r)$

$$=17\pi\left(\frac{16}{r}+r^2\right)$$ 05

05 $$\frac{dS}{dr}=17\pi\left(\frac{16}{r^2}+2r\right)=\frac{34\pi(r^3-8)}{r^2}$$ 05

$$\frac{dS}{dr}=0 \quad \Leftrightarrow \quad r=2$$

$0<r<2$ විට දී $\frac{dS}{dr}<0$ සහ $r>2$ විටදී $\frac{dS}{dr}>0$

05 05

$\therefore \ r=2$ විට දී S අවම වේ. 05

(a) (i) x^2 , x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්
සියලු $x \in R$ සඳහා $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$
වන පරිදි A , B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.
ඒනයින් , $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා
$\int \dfrac{1}{x^3(x-1)}dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \cos 2x dx$ සොයන්න.

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ආදේශය භාවිතයෙන් ,
$\int_0^a \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = 2\ln(1+\sqrt{2})$ බව පෙන්වන්න.
a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් ,
$\int_0^\pi \dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$ සොයන්න.

(a) (i) $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$
සංගුණක සැසඳීමෙන් :

x^2 : $-A+B=0$ 05
x^1 : $-B+C=0$ 05
x^0 : $-C=1$ 05

$A=-1$, $B=-1$ *and* $C=-1$ 05

$1=-x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)+x^3$
$\therefore$ $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ භින්න භාග ඇසුරින්
$\dfrac{1}{x^3(x-1)} = -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x-1}$ ලෙස වේ. 05

එනයින් $\int \dfrac{1}{x^3(x-1)}dx = -\int \dfrac{1}{x}dx - \int \dfrac{1}{x^2}dx - \int \dfrac{1}{x^3}dx + \int \dfrac{1}{x-1}dx$

$= -\ln|x| + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C$ 05

05 05 05 05

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ.

(ii) $\int x^2 \cos 2x dx = \dfrac{x^2 \sin 2x}{2} - \dfrac{1}{2}\int 2x \sin 2x dx$ 05 05

$$=\frac{x^2\sin 2x}{2}+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$ 05 05

05

$$=\frac{x^2\sin 2x}{2}+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$$

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. 05

(b) $\theta=\tan^{-1}(\cos x);-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\tan\theta=\cos x \Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta=-\sin x\,dx$ 05

$x=0 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$ 05

$x=\pi \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{4}$ 05

05 05 05

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\,d\theta$$

$$\left(\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)}d\theta$$ 05

$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$ 05

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1)$$ 05

$$=\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}\right)$$

$$=2\ln(\sqrt{2}+1)$$ 05

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}dx$$ 05

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$ 05

$\Rightarrow \quad I=\pi\left[2\ln(\sqrt{2}+1)\right]-1$ 05

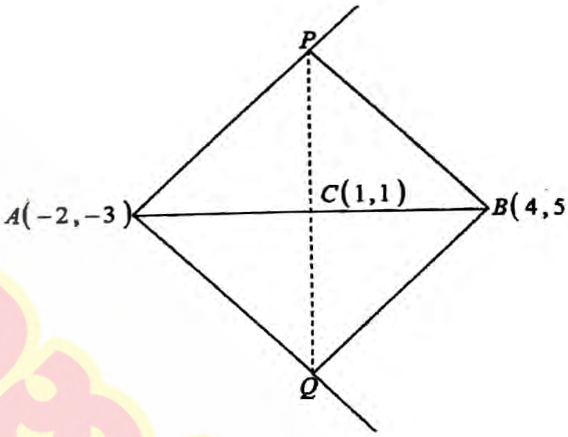
$\Rightarrow \quad 2I=2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$

$\Rightarrow \quad I=\pi\ln(\sqrt{2}+1)$ 05

16. $A\equiv(-2\,,\,-3)$ හා $B\equiv(4\,,\,5)$ යැයි ගනිමු. AB රේඛාව සමග l_1 හා l_2 රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 හා l_2 රේඛාවල සමීකරණය සොයන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් l_1 හා l_2 මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය. PQ හි සමීකරණය සොයා P හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
තව ද A , P , B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
$\lambda>1$ යැයි ගනිමු.
$R\equiv(4\lambda\,,\,5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය , S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.
R ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.
$\lambda(>1)$ විචලනය වන විට , මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}}\right| \quad (10)$$



$$\Rightarrow\left(m-\frac{4}{3}\right)^2=\left(1+\frac{4m}{3}\right)^2 \quad (05)$$

$$\Rightarrow 7m^2+48m-7=0$$

$$\Rightarrow(7m-1)(m+7)=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{7} \text{ or } m=-7$$

(05) (05)

∴ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ

(i) $y+3=\frac{1}{7}(x+2)\Rightarrow x-7y-19=0$ (10)

සහ

(ii) $y+3=-7(x+2)\ \Rightarrow\ 7x+y+17=0$ (10)

l_1 යනු $x-7y-19=0$ රේඛාව සහ අනෙක l_2 යැයි ගනිමු.

PQ හි සමීකරණය: $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 3x+4y-7=0$ (10)

l_1 සහ PQ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය: $P=(5\,,\,-2)$ (05)

$Q=(x_0\,,\,y_0)$ නම් ,

$$\frac{5+x_0}{2}=1\Rightarrow x_0=-3 \quad (05)$$

$$\frac{-2+y_0}{2}=1\Rightarrow y_0=4$$

$Q\equiv(-3\,,\,4)$ (05)

A , P , B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. 10

$$(y-5)(y+3)+(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$$ 10

$CR^2=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. 10

දැන් $CR^2-25=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2-25$ 05

$$=41\lambda^2-18\lambda-2$$

$$=(\lambda-1)(41\lambda+23)>0 \text{ as } \lambda>1$$ 10

$\therefore$ R ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. 05

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda)+y(5\lambda)-(x+4\lambda)-(y+5\lambda)-23=0$$ 10

$$(-x-y-23)+\lambda(4x+5y-9)=0$$ 05

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x+5y-9=0$ හා $x+y+23=0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. 10

එය අචල ලක්ෂ්‍යයකි. 05

17. (a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ විසඳන්න. $\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා , $\cos 2\theta+\cos 3\theta=4t^3+2t^2-3t-1$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $t=\cos\theta$ වේ.

ඒනයින් $4t^3+2t^2-3t-1=0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2-2t-1=0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD:DC=m:n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. මෙහි m , $n>0$ වේ.

$B\hat{A}D=\alpha$ හා $D\hat{A}C=\beta$ බව දී ඇත.

BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්

$\dfrac{mb}{nc}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $b=AC$ හා $c=AB$ වේ.

ඒ නයින් $\dfrac{mb-nc}{mb+nc}=\tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$ (05) (05)

$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta)$, $n \in z$ (05)

$5\theta = 2n\pi + \pi$, $n \in z$ or $\theta = 2n\pi - \pi$, $n \in z$

$0 \le \theta \le \pi$ බැවින් විසඳුම් $\theta = \pi$, $\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ (05)

(05) (05)

(05) (05)

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ *and* $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\therefore \quad \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$

$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$, මෙහි $t = \cos\theta$ (10)

$\therefore \quad 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\pi$, $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ (10)

$\cos\pi = -1 \Rightarrow t = 1$ යනු $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ හි සාධකයකි.

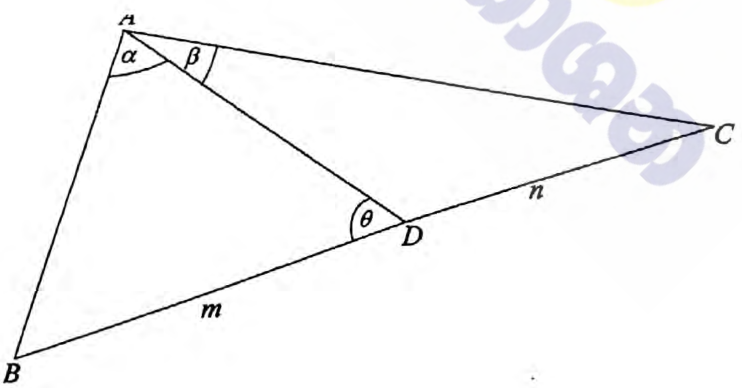
$\Rightarrow 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^3 - 2t - 1) = 0$ (10)

$\Rightarrow 4t^2 - 2t - -1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ (05)

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ (05)

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ (05)

(b)



$B\hat{D}A = \theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

$BAD\,\Delta : \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ (10)

$ADC\,\Delta : \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)}$ (10)

$$\Rightarrow \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad 05$$

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad 05}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad 05}$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad 05$$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$

05 $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින්, 2γ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad 05$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad 05$$

$$\therefore \; 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \quad 05$$

උසස් පෙළ සඳහා ග්‍රන්ථ නාමාවලිය

(අ.පො.ස) උසස් පෙළ
12-13 ශ්‍රේණි - කෙටි සටහන්

සිංහල මාධ්‍ය

විද්‍යා - ගණිත

- 12 සාමාන්‍ය තොරතුරු තාක්‍ෂණය
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 1
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 2
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 3
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 4
- 12-13 රසායන විද්‍යාව - 5
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 1
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 2
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 3
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 4
- 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 5
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 1
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 2
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 3
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 4
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 5
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 6 (ක්‍රියාකාරී මානවයා)
- 12-13 ජීව විද්‍යාව - 7 (ක්‍රියාකාරී ශාකය)
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 1
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 2
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 3
- 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 4

වාණිජ්‍යය

- 12 ගිණුම්කරණය
- 13 ගිණුම්කරණය
- 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 13 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 12 ආර්ථික විද්‍යාව
- 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 1
- 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 2

කලා

- 12 සිංහල
- 13 සිංහල
- 12 දේශපාලන විද්‍යාව
- 13 දේශපාලන විද්‍යාව
- 12 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- 13 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- 12 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- 13 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- 12 භූගෝල විද්‍යාව
- 13 භූගෝල විද්‍යාව
- 12 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- 13 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- 12 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය
- 13 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය

Grade 12-13 - Short Notes

English Medium

- 12 Accounting
- 13 Accounting
- 12 Business Studies
- 13 Business Studies
- 12 Economics

12-13 ශ්‍රේණි - ප්‍රශ්නෝත්තර

සිංහල මාධ්‍ය

- සාමාන්‍ය දැනීම
- 12 ගිණුම්කරණය - 1
- 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- 12 ආර්ථික විද්‍යාව

සියලු ම ශ්‍රේණි සඳහා කෙටි සටහන් සහ ප්‍රශ්න පත්‍ර පොත් අප සතුව තිබෙන අතර, මෙම ඕනෑම ග්‍රන්ථයක් වට්ටම් සහිත ව ඔබේ නිවසට ම ගෙන්වා ගත හැකි ය.